УДК 51 (071)

Л.П. Мироненко[1], *И.В. Петренко*[2]
[1] Донецкий национальный технический университет, Украина
[2] Государственный университет информатики и искусственного интеллекта, г. Донецк, Украина

Матричный метод классификации кривых второго порядка

В работе предложен простой метод классификации кривых второго порядка и найдены их канонические формы уравнений. Основу метода составляет анализ симметричной матрицы третьего порядка, составленной из коэффициентов симметричной квадратичной формы второго порядка двух переменных.

Введение

Принципиально различают два подхода при изучении кривых второго порядка в аналитической геометрии. Условно назовем их аналитическим и геометрическим. В основе первого из них: уравнения кривых определяются непосредственно аналитическими выражениями, а геометрические свойства кривых выводятся исходя из уравнений [1-3].

В другом подходе в качестве определений кривых второго порядка принимаются их геометрические свойства. Как правило, в качестве определений кривых принимаются геометрические свойства фокальных радиусов [4], [5].

Оба подхода имеют недостатки. В аналитическом подходе уравнения кривых «декларируются» и не видно их происхождения. В геометрическом подходе вывод канонических уравнений кривых (за исключением уравнения параболы) сопряжен со сложными и громоздкими вычислениями.

Наконец, существует еще один достаточно общий подход, основанный на использовании свойств симметрии кривых. Этот подход позволяет получить канонические уравнения кривых из общего алгебраического уравнения второй степени [6-8]. Надлежащим выбором декартовой системы координат и определения кривых второго порядка, основанных на свойствах фокальных радиусов и директрис (на различиях значений эксцентриситетов различных типов кривых), уравнение общего вида приводится к каноническому уравнению соответствующей кривой [9].

Наиболее адекватным является подход, основанный на параллельном переносе и повороте осей декартовой системы координат, которые приводят уравнение общего вида (1) к одной из канонических форм. Этот подход позволяет провести полную классификацию геометрических образов, порождаемых квадратичной формой (1). Однако в подходе имеется недостаток, связанный со значительными по объему вычислительными действиями.

В работе предлагается относительно простой способ классификации кривых второго порядка, основанный на идее параллельного переноса и поворота осей системы координат, но отличающийся тем, что вместо проведения аналитических расчетов используются мономиальные матрицы, которые можно построить из коэффициентов квадратичной формы (1). Каждая такая матрица, в зависимости от значений коэффициентов и их знаков, дает уравнения различных типов кривых.

1 Обоснование идеи метода классификации линий второго порядка

Рассмотрим общее уравнение второй степени с двумя неизвестными x и y:

$$a_{11}x^2 + 2a_{12}xy + a_{22}y^2 + 2a_{13}x + 2a_{23}y + a_{33} = 0, \quad (1)$$

где $a_{11}, a_{12}, ..., a_{33}$ – коэффициенты уравнения, заданные действительные числа.

Запишем матрицу, составленную из коэффициентов квадратичной формы уравнения (1)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}, \ A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & 0 \\ a'_{21} & a'_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a'_{33} \end{pmatrix}, \ A'' = \begin{pmatrix} a''_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a''_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a''_{33} \end{pmatrix}. \quad (2)$$

В уравнении (1) матрица A является симметричной $a_{ij} = a_{ji}$. Это означает, что у матрицы A, вообще говоря, различных только шесть элементов.

Как известно, при параллельном переносе декартовой системы координат на плоскости xOy и помещении ее в «центр» кривой, линейные члены формы (1) по x и y обращаются в нуль (исключением является парабола). Это означает, что коэффициенты a_{13}, a_{23} матрицы (2) равны нулю. Учитывая симметричный характер матрицы A, получим преобразованную матрицу A'. Здесь коэффициенты $a'_{11}, a'_{12}, a'_{22}, a'_{33}$ квадратичной формы в новой системе координат $x'O'y'$, которая получена из старой xOy путем параллельного переноса вдоль осей координат x и y начала O в точку O'. Теперь поворотом системы координат $x'O'y'$ в «центре» кривой O' всегда можно добиться того, чтобы квадратичный «смешанный» член $2a'_{12}x'y'$ обратился в нуль. В результате исходная матрица A примет диагональный вид A''. Здесь коэффициенты $a''_{11}, a''_{22}, a''_{33}$ квадратичной формы в системе координат $x''O'y''$, которая получена из системы $x'O'y'$ путем поворота осей координат x' и y' вокруг начала координат O'. Заметим, что по внешнему виду матрица относится к так называемым *мономиальным* матрицам. Квадратная матрица называется *мономиальной*, если в каждой ее строке и столбце имеется единственный отличный от нуля элемент. Преобразование матрицы A квадратичной формы (1) с помощью параллельного переноса и поворота осей системы координат к диагональной матрице подсказывает возможность привести матрицу A к другому виду, в котором из 6 независимых элементов останется только 3 (параллельный перенос вдоль двух осей координат дает два «нулевых» элемента и поворот – еще один «нулевой» элемент, всего можно обратить в нуль 3 коэффициента a_{ij}). Эти рассуждения приводят к методу классификации возможных типов уравнений кривых второго порядка путем построения всевозможных мономиальных матриц из исходной матрицы A.

2 Построение различных мономиальных матриц и классификация кривых второго порядка

В теории матриц определяются матрицы специального вида – мономиальные матрицы. Это квадратные матрицы, у которых в каждой строке и в каждом столбце находится только один, отличный от нуля, элемент. Простейшим примером мономиальной матрицы является единичная матрица E.

Идея классификации линий второго порядка состоит в том, чтобы из данной матрицы A построить все возможные мономиальные матрицы. Их всего четыре вида:

$$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix},\ A_2 = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix},\ A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_4 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{23} \\ 0 & a_{32} & 0 \end{pmatrix}. \quad (3)$$

Заметим, что все матрицы невырожденные:

$$\det A_1 = a_{11}a_{22}a_{33},\ \det A_2 = -a_{22}a_{13}^2,\ \det A_3 = -a_{33}a_{12}^2,\ \det A_4 = -a_{11}a_{23}^2. \quad (4)$$

Рассмотрим подробно каждую из матриц (3). Подставим отличные от нуля элементы матрицы A_1 в уравнение (1), получим

$$a_{11}x^2 + a_{22}y^2 + a_{33} = 0. \quad (5)$$

Комбинации знаков элементов a_{11}, a_{22}, a_{33} матрицы A_1 приводят к следующим уравнениям:

[1] $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ – уравнение эллипса с полуосями a и b;

[2] $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ – уравнение гиперболы;

[3]* $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ – уравнение сопряженной гиперболы по отношению к гиперболе (2);

[4] $\frac{x^2}{a^2} + \frac{x^2}{b^2} = -1$ – уравнение мнимого эллипса.

Замечание. Звездочкой отмечены уравнения кривых, которые не входят в классическую классификацию кривых второго порядка.

Подставим отличные от нуля элементы матрицы A_2 в уравнение (1), получим

$$a_{12}xy + a_{33} = 0. \quad (6)$$

Комбинации знаков элементов a_{12}, a_{33} матрицы A_2 приводят к следующим уравнениям:

[5]* $xy = p$, $p = -\frac{a_{33}}{a_{12}} < 0$ – уравнение гиперболы, расположенной во второй и четвертой координатных четвертях плоскости, p – параметр гиперболы;

[6]* $xy = p$, $p = \frac{|a_{33}|}{a_{12}} > 0$ – уравнение гиперболы, расположенной в первой и третьей четвертях координатных плоскости.

Подставим отличные от нуля элементы матрицы A_3 в уравнение (1), получим

$$a_{11}x^2 + 2a_{23}y = 0. \quad (7)$$

Комбинации знаков элементов a_{11}, a_{33} матрицы A_3 приводят к следующим уравнениям:

[7]* $x^2 = 2py$, $p = -\frac{a_{23}}{a_{11}} < 0$ – уравнение параболы, расположенной в нижней полуплоскости; p – параметр параболы;

[8]* $x^2 = 2py$, $p = \frac{|a_{23}|}{a_{11}} > 0$ – уравнение параболы, расположенной в верхней полуплоскости.

Подставим отличные от нуля элементы матрицы A_4 в уравнение (1), получим

$$a_{22}y^2 + 2a_{13}x = 0. \tag{8}$$

Комбинации знаков элементов a_{22}, a_{33} матрицы A_4 приводят к следующим уравнениям:

[9]* $y^2 = 2px$, $p = -\frac{a_{13}}{a_{22}} < 0$ – уравнение параболы, расположенной в левой полуплоскости;

[10] $y^2 = 2px$, $p = \frac{|a_{13}|}{a_{22}} > 0$ – уравнение параболы, расположенной в правой полуплоскости.

Обратим внимание на то, что матрицы A_3 и A_4 приводят к уравнениям (7) и (8), отличающимся формально переменой местами неизвестных x и y. Матрицы, приводящие качественно к одному и тому же уравнению и переходящие друг в друга при циклической замене переменных, будем называть *топологически эквивалентными*. Таким образом, матрицы A_3 и A_4 являются топологически эквивалентными. Наоборот, топологически различными являются матрицы A_1, A_2 и A_3. Именно эти три матрицы приводят к трем каноническим формам уравнений эллипса, гиперболы и параболы.

Как видно из рассмотрения, мономиальные матрицы квадратичной формы алгебраического уравнения второй степени общего вида приводят к одному из трех канонических форм уравнений линий второго порядка – эллипсу, гиперболе и параболе.

Отличительным моментом подхода является появление уравнения гиперболы в виде $xy = p$ или уравнений [5]*, [6]*, что в обычной классификации линий второго порядка не рассматривается. Уравнение гиперболы в виде $xy = p$ является частным случаем уравнений гиперболы в виде $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ или $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Тем не менее, наша теория дает каноническую форму уравнения, т.е. одну из простейших форм математической записи уравнения гиперболы. Таким образом, матричный подход классификации кривых второго порядка автоматически учитывает одну из простейших форм записи уравнения гиперболы в виде уравнения $xy = p$.

3 Классификация вырожденных геометрических образов в матричном методе

Обратимся к вырожденным случаям уравнения (1). Следуя логике изложения, рассмотрим топологически не эквивалентные матрицы A_1, A_2, A_3. Из каждой матрицы можно получить вырожденную, т.е. такую, детерминант которой равен нулю. Так, равенство $\det A_1 = 0$ реализуется в трех случаях:

$$A_1^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_1^{(2)} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix},\ A_1^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Первая матрица соответствует уравнению $a_{11}x^2 + a_{11}y^2 = 0$, которое, в свою очередь, в зависимости от знаков a_{11} и a_{22}, дает два варианта [11] $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$ – уравнение точки $(0,0)$ или уравнение пары мнимых пересекающихся прямых и [12] $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0$ – уравнения пары пересекающихся прямых $y = \pm kx,\ k = a/b$.

Вторая матрица соответствует уравнению $a_{11}x^2 + a_{33} = 0$, которое, в свою очередь, в зависимости от знаков a_{11} и a_{33}, дает два варианта $x^2 = p^2$ – уравнения пары параллельных прямых $x = \pm p$ и [13] $x^2 = -p^2$ – уравнения пары мнимых параллельных прямых $x = \pm ip$.

Третья матрица соответствует уравнению $a_{22}y^2 + a_{33} = 0$. Сравнивая это уравнение с предыдущим, делаем вывод о топологической эквивалентности матриц $A_1^{(2)}$ и $A_1^{(3)}$.

Равенство $\det A_2 = 0$ реализуется в одном случае:

$$A_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица соответствует уравнению $a_{12}xy = 0$, которое дает два уравнения [14]* $x = 0, y = 0$ – уравнения координатных осей x и y.

Равенство $\det A_3 = 0$ реализуется в двух случаях:

$$A_3^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},\ A_3^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & 0 & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Первая матрица соответствует уравнению $a_{22}y^2 = 0$, которое дает уравнение [15]* $y^2 = 0$ – пара двух совпадающих координатных осей x. Вторая матрица соответствует уравнению $a_{13}x = 0$, которое дает уравнение [16]* $x = 0$ – координатная ось y.

Замечание. Матрицы $A_3^{(1)}$ и $A_3^{(2)}$ топологически не эквивалентны матрице $A_2^{(1)}$. Внешне три матрицы различимы в смысле их топологического свойства, хотя матрица $A_2^{(1)}$ дает пару уравнений $x = 0, y = 0$, а матрицы $A_3^{(1)}$ и $A_3^{(2)}$ дают по одному уравнению $y^2 = 0$ и $x = 0$ (отличие также в том, что $A_3^{(2)}$ дает $y^2 = 0$, т.е. пару совпадающих осей x).

Остается рассмотреть дважды вырожденную матрицу A. Такая, топологически не эквивалентная матрица, только одна

$$A_3^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Она соответствует уравнению $a_{11}x^2 = 0$, которое дает уравнение [17]* $x^2 = 0$ – уравнения двух совпадающих координатных осей y.

4 Таблица классификации геометрических образов согласно матричному методу

Приведем классификацию всех возможных геометрических образов уравнения второй степени (1).

Таблица 1 – Матричный метод классификации

Не вырожденные мономиальные топологически различные матрицы		
1	$A_1 = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$	уравнения эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, мнимого эллипса $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = -1$, гиперболы $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$ и сопряженной гиперболы $-\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$
2	$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$	уравнения гипербол $xy = p, p > 0$ и $p < 0$;
3	$A_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & a_{13} \\ 0 & a_{22} & 0 \\ a_{31} & 0 & 0 \end{pmatrix}$	уравнения парабол $y^2 = 2px$ и $x^2 = 2py$
Однократно вырожденные мономиальные топологически различные матрицы		
4	$A_1^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	пары пересекающихся прямых $y = \pm kx$, пары мнимых пересекающихся прямых $y = \pm ikx$ или уравнение точки $(0,0)$
5	$A_1^{(3)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix}$	уравнения пары параллельных прямых $y = \pm p$, уравнения пары мнимых параллельных прямых $y = \pm ip$
6	$A_2^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	уравнения осей координат $x = 0, y = 0$
Двукратно вырожденные мономиальные топологически различные матрицы		
7	$A_3^{(1)} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	уравнения пары совпадающих координатных осей $y = 0$

Все возможные геометрические образы, соответствующие общему уравнению второй степени (1), описываются шестью матрицами, из которых три A_1, A_2, A_3 – мономиальные и отвечают трем типам кривых второго порядка – эллипсу, гиперболе и параболе, а следующие три $A_1^{(1)}, A_1^{(2)}, A_2^{(1)}$ – однократно вырожденные матрицы – соответствуют различным вырожденным геометрическим образам.

Таблица 2 – Сравнение матричного метода с другими методами классификации кривых второго порядка [10-14]

[1]	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$	эллипс
[2]	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=-1$	мнимый эллипс
[3]	$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=0$	две мнимые пересекающиеся прямые
[4]	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$	гипербола
[5]	$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=0$	две действительные пересекающиеся прямые
[6]	$y^2=2px$	уравнения параболы
[7]	$x^2=a^2$	две параллельные прямые
[8]	$x^2=-a^2$	две мнимые параллельные прямые
[9]	$x^2=0$	две совпадающие прямые

Сравнивая табл. 1 табл. 2, можно сделать вывод о том, что наша классификация воспроизводит все известные геометрические образы, полученные различными существующими методами. Более того, наша теория проще и шире. Так, положительным моментом подхода является тот факт, что каноническое уравнение гиперболы представлено в двух формах $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ и $xy=p$. В классических подходах получают только первую форму для уравнения гиперболы. Вторая форма записи уравнения гиперболы имеет полное право на существование, поскольку имеет простой вид.

Покажем, что уравнение гиперболы $xy=p$ отличается от $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}=1$ поворотом осей декартовой системы координат на угол $\pi/4$.

$$x=x'\cos\frac{\pi}{4}+y'\sin\frac{\pi}{4},\ \ y=-x'\sin\frac{\pi}{4}+y'\cos\frac{\pi}{4}\ \text{ или }\ x=\frac{\sqrt{2}}{2}(x'+y'),\ \ y=\frac{\sqrt{2}}{2}(-x'+y').$$

Подставим в уравнение $xy=p$, получим

$$\frac{1}{2}(-x'^2+y'^2)=p\Rightarrow\frac{y'^2}{(\sqrt{2p})^2}-\frac{x'^2}{(\sqrt{2p})^2}=1$$ – равнобочная гипербола.

Выводы

В работе предложен матричный метод классификации линий второго порядка и других геометрических образов, порождаемых алгебраическим уравнением второго порядка общего вида (1). Подход основан на анализе возможных мономиальных матриц, составленных из коэффициентов квадратичной формы общего вида. Невырожденные мономиальные матрицы состоят во взаимно однозначном соответствии с возможными типами кривых, а вырожденные матрицы, полученные из мономиальных, соответствуют вырожденным случаям кривых второго порядка, следовательно, вырожденным геометрическим образам.

Матричный метод классификации воспроизводит все известные ранее геометрические образы (девять возможных образов (табл. 2)) и дополняет новым частным случаем равнобочной гиперболы $xy=p$, уравнение которой обычно отсутствует в классической классификации [10-14].

Другим важным выводом теории является возможность распространить метод для классификации поверхностей второго порядка, записав все возможные мономиальные матрицы четвертого порядка из матрицы, составленной из коэффициентов квадратичной формы для трех переменных x, y, z.

Литература

1. Ефимов Н.В. Краткий курс аналитической геометрии / Ефимов Н.В. – М. : Наука, 1969. – 272 с.
2. Александров П.С. Курс аналитической геометрии и линейной алгебры / Александров П.С. – М. : Наука, 1979. – 512 с.
3. Дьедонне Ж. Линейная алгебра и элементарная геометрия / Дьедонне Ж. – М. : Наука, 1972. – 336 с.
4. Ефимов Н.В. Линейная алгебра и многомерная геометрия / Н.В. Ефимов, Э.Р. Розендорн. – М. : Наука, 1969. – 527 с.
5. Улитин Г.М. Геометрический подход к выводу канонических уравнений линий второго порядка / Г.М. Улитин, Л.П. Мироненко // Науково-методичні роботи. – Донецьк : ДонНТУ, 2009. – Вип. 6. – С. 3-9.
6. Улитин Г.М. Использование свойств симметрии кривых второго порядка для вывода их канонических уравнений / Г.М. Улитин, Л.П. Мироненко // Дидактика математики. – Донецк : ДонНУ, 2009. – С. 32-40.
7. Мироненко Л.П. Использование свойств симметрии кривых второго порядка для вывода их канонических уравнений / Л.П. Мироненко, И.В. Петренко, И.А. Новикова // Искусственный интеллект. – 2010. – № 1. – С. 135-141.
8. Мироненко Л.П. Единый подход рассмотрения канонических уравнений кривых второго порядка / Л.П. Мироненко, И.В. Петренко, И.А. Новикова // Искусственный интеллект. – 2010. – № 2. – С. 50-56.
9. Ильин В.А. Линейная алгебра / В.А. Ильин, Э.Г. Поздняк. – М. : Наука, 1999. – 296 с.
10. Кадомцев С.В. Линейная алгебра и аналитическая геометрия / Кадомцев С.В. – М. : Физматлит, 2003. – 160 с.
11. Apostol T.M. Calculus. One-Variable Calculus with an Introduction to Linear Algebra. Vol. 1 / Apostol T.M. – John Wilay and Sons, Inc., 1966. – 667 с.
12. Делоне В.И. Аналитическая геометрия. Т. 1 / В.И. Делоне, Д.А. Райков. – М. ; Л. : Гостехиздат, 1949. – 592 с.
13. Привалов И.И. Аналитическая геометрия / Привалов И.И. – Москва : Изд. ФМЛ, 1956. – 272 с.
14. Моденов П.С. Аналитическая геометрия / Моденов П.С. – Москва : Изд. Московского университета, 1966. – 698 с.

Literatura

1. Efimov N.V. Kratkij kurs analiticheskoj geometrii. M.: Nauka. 1969. 272 s.
2. Aleksandrov P.S. Kurs analiticheskoj geometrii i linejnoj algebry. M.: Nauka. 1979. 512 s.
3. D’edonne Zh. Linejnaja algebra i elementarnaja geometrija. M.: Nauka. 1972. 336 s.
4. Efimov N.V. Linejnaja algebra i mnogomernaja geometrija. M.: Nauka, 1969. 527 s.
5. Ulitin G.M. Sb. naukovo-metodychnih robit. Donec’k: DonNTU. 2009. Vyp. 6. S. 3-9.
6. Ulitin G.M. Didaktika matematiki. Doneck: DonNU. 2009. S. 32-40.
7. Mironenko L.P. Iskustvennyj intellekt. 2010. № 1. S. 135-141.
8. Mironenko L.P. Isskustvennyj intellekt. 2010. № 2. S. 50-56.
9. Il’in V.A. Linejnaja algebra. M.: Nauka. 1999. 296 s.
10. Kadomcev S.V. Linejnaja algebra i analiticheskaja geometrija. M.: FIZMATLIT. 2003. 160 s.
11. Apostol T.M. Calculus. One-Variable Calculus with an Introduction to Linear Algebra.Vol. 1. John Wilay and Sons, Inc. 1966. 667 s.
12. Delone V.I. Analiticheskaja geometrija. Tom 1. Gostehizdat. 1949. 592 s.
13. Privalov I.I. Analiticheskaja geometrija. Izd. FML. Moskva. 1956. 272 s.
14. Modenov P.S. Analiticheskaja geometrija. Moskva: Izd. Moskovskogo universiteta. 1966. 698 s.

Л.П. Мироненко, І.В. Петренко

Матричний метод класифікації кривих другого порядку

У роботі запропонований простий метод класифікації кривих другого порядку і знайдені їх канонічні форми рівнянь. Основу методу складає аналіз симетричної матриці третього порядку, складеної з коефіцієнтів симетричної квадратичної форми другого порядку двох змінних.

L.P. Mironenko, I.V. Petrenko

The Matrix Method for Classification of the Second Order Curves

In the paper the simple method of a classification of the second order curves is offered and their canonical forms for equations are found. The method is based on the analysis of the third order symmetrical matrix, which is formed by the coefficients of the second order symmetrical quadratic form of two variables.

Статья поступила в редакцию 29.06.2011.